Relativité restreinte

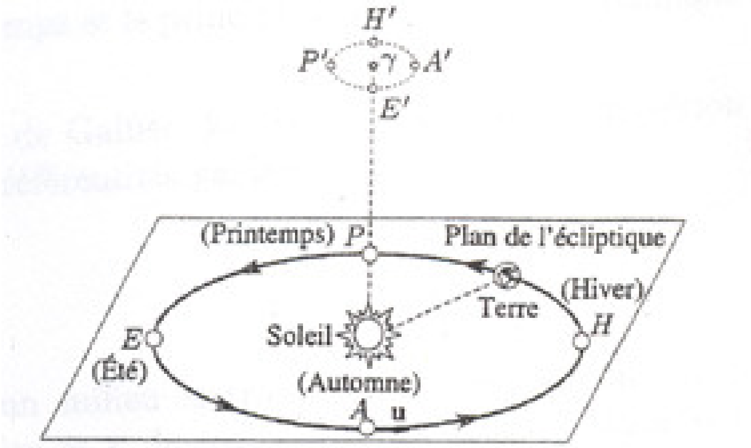
Année 2021-2022

Arnaud LE PADELLEC

alepadellec@irap.omp.eu

Exercice 1 : aberration des étoiles en cinématique galiléenne
On considère deux référentiels galiléens R et R', de vitesse u = u e_x par rapport à R. Une source située sur l'axe Oy du référentiel inertiel $R = Oxyz$ émet vers O une onde lumineuse monochromatique plane, dont la vitesse de propagation est v_l. Le récepteur est lié au référentiel R'.

1. Exprimer, en fonction de vl et u, l'angle θ', que fait avec l'axe Ox la direction de propagation de l'onde dans R', si l'on adopte la transformation de Galilée.
2. En 1725, J. Bradley a mesuré le diamètre angulaire de la trajectoire circulaire apparente de l'étoile γdu Dragon, situé sur l'axe de l'écliptique ; cet axe est l'axe perpendiculaire au plan de l'orbite plane du centre de la Terre autour du Soleil, appelé l'écliptique, et passant par le centre du Soleil. Il a trouvé 40 secondes d'arc. Sachant que la vitesse de translation de la Terre dans son mouvement orbital autour du Soleil est d'environ 30 km s^{-1}, calculer la valeur qu'il avait obtenue pour la vitesse de la lumière dans le vide. Commenter.

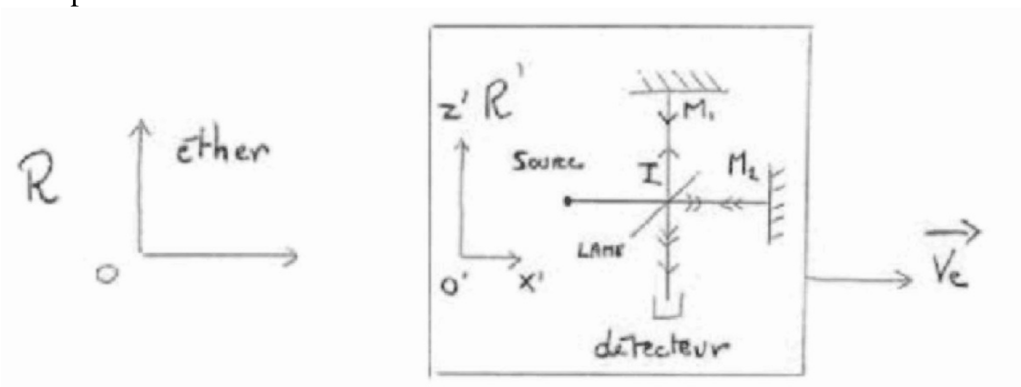


Exercice 2 : changement de chronologie de deux évènements
On considère une barre AB, de longueur propre L = 1 m, qui se déplace à la vitesse $\boldsymbol{u} = u\,\mathbf{e}_x$ avec $u = 0{,}8\,c$ par rapport au référentiel du laboratoire $R = Oxyz$, le long de l'axe horizontal Ox. Sur cet axe de R se trouve une seconde barre OE de même longueur propre L = 1 m. On désigne par E_1 l'évènement origine pris lorsque les deux extrémités O et B coïncident, E_2 l'évènement lorsque les extrémités O et A coïncident, E_3 l'évènement lorsque les extrémités E et B coïncident. On note $R' = Ox'y'z'$ le référentiel lié à la barre AB.

1. Calculer les coordonnées spatio-temporelles de E_2 dans R et dans R'. En déduire le carré de l'intervalle entre E_1 et E_2.
2. Mêmes questions pour E_3.
3. Comparer la chronologie entre les trois évènements dans R et dans R'. Commenter en calculant le carré de l'intervalle entre E_2 et E_3.

Exercice 3 : expérience de Michelson
On a longtemps considéré que la propagation de la lumière avait pour support un milieu hypothétique, appelé éther. On désigne par R le référentiel associé à ce milieu. On s'attendait en particulier à ce que la vitesse de la lumière par rapport au référentiel du laboratoire ou référentiel terrestre R' varierait au cours du mouvement de translation de la Terre par rapport à R.
A. Michelson proposa en 1881 une expérience d'interférométrie optique susceptible de détecter de très faibles variations de vitesse. L'interféromètre de Michelson est constitué de deux miroirs M_1, M_2 et d'une lame semi transparente L qui divise l'onde incidente en deux parties d'égale intensité. Ces deux dernières sont ensuite réfléchies par les miroirs M_1 et M_2 et la superposition des ondes est enfin

détectée en P. Ce dispositif est composé de deux bras (IM_1 et IM_2) de même longueur l (voir schéma ci-dessous). L'ensemble, placé dans l'air qu'on assimilera au vide, est fixe dans $R' = O'x'y'z'$ et en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel $R = Oxyz$ selon l'axe Ox à la vitesse v_e. Les référentiels R et R' peuvent être considérés, avec une très bonne approximation, comme galiléens.
On se propose d'examiner les implications de cette expérience. Le problème comporte trois parties. Dans la première, on mène un calcul non relativiste (newtonien), dans la deuxième un calcul relativiste (au sens einsteinien) pour enfin dans la dernière partie confronter ces deux approches aux observations expérimentales.



Calcul non relativiste
On désigne par $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v}'$ respectivement la célérité de la lumière dans R et dans R'. Dans cette partie du problème, on considère que la norme $\|\boldsymbol{v}\|$ de cette célérité dans R est une constante de valeur c.

1. Rappeler la relation newtonienne entre les vitesses $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ et $\boldsymbol{v}_e$.
2. On note τ_1 la durée mise par la lumière pour aller de I à M_1 et revenir en I, et τ_2 celle mise par la lumière pour aller de I à M_2 et revenir en I. Montrer que $\tau_1 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v_e^2}}$ et $\tau_2 = \frac{2lc}{c^2 - v_e^2}$
3. Calculer la différence des durées $\tau_N = \tau_2 - \tau_1$. Sachant que $v_e \ll c$, donner une forme approchée de τ_N. Application numérique avec $l = 12$ m et $v_e = 30$ km s^{-1}.

Calcul relativiste
On définit les évènements suivants :
E_0 : émissions simultanées depuis I du signal S_1 vers M_1 et du signal S_2 vers M_2.
R_1 : réflexion du signal S_1 au miroir M_1.
R_2 : arrivée du signal S_2 au miroir M_2.
I_1 : retour du signal S_1 en I après réflexion sur M_1.
I_2 : retour du signal S_2 en I après réflexion sur M_2.

1. L'évènement E_0 étant choisi comme origine, exprimer en fonction de l les coordonnées de R_1, R_2, I_1 et I_2 dans R'.
2. En déduire, en utilisant la transformation de Lorentz-Poincaré, les coordonnées de ces mêmes évènements dans R. Peut-on analyser ces résultats en terme de dilatation des durées ou de contraction des longueurs ? Justifier.
3. La différence entre durées des trajets IM_2I et IM_1I est notée τ_E dans R et τ'_E dans R'. Calculer et comparer τ_E et τ'_E.

Confrontation à l'expérience
Michelson réalisa l'expérience avec une source quasi-monochromatique de la longueur d'onde dans le vide λ_0.

1. Exprimer la différence de phase ϕ entre les ondes ayant effectuées les trajets $IM1I$ et IM_2I en fonction de la différence des durées τ entre les deux trajets, ainsi que de c et λ_0. Donner l'expression Φ_N et Φ_E qui correspondent respectivement au calcul non relativiste et relativiste.
2. Michelson fit tourner l'appareil de 90° autour de l'axe vertical, de façon à ce que les rôles joués par les bras IM_1 et IM_2 soient inversés par rapport à la direction de $\boldsymbol{v}_e$; le bras IM_1 est maintenant parallèle à $\boldsymbol{v}_e$. Que deviennent Φ_N et Φ_E ?
3. A toute variation de la différence de phase est associée une variation de l'intensité lumineuse. En faisant tourner le dispositif de 90°, que s'attendait à observer Michelson en se fiant à l'analyse non relativiste ? Qu'observa-t-il en réalité ? Commenter.

Exercice 4 : émission anisotrope d'une source en mouvement
Une source S de lumière est animée d'une vitesse $\boldsymbol{u} = u\,\boldsymbol{e}_x$ par rapport au référentiel du laboratoire R, avec $u = 0{,}8\,c$. Cette source émet des photons de manière isotrope dans son propre référentiel R'.

1. On considère des photons dont la vitesse est dirigée suivant une direction faisant l'angle θ' avec l'axe Ox'. A l'aide des formules de transformation des vitesses, trouver l'angle θ sous lequel seront émis ces photons pour un observateur de R. Calculer θ pour $\theta' = \pi/2$.

2. Montrer que, pour un observateur lié à R, le nombre dN de photons émis dans l'angle solide élémentaire dΩ a pour expression : $\mathrm{d}N = \frac{N d\Omega}{4\pi\gamma_e^2(1-\beta_e\cos\theta)^2}$, N étant le nombre total de photons, $\beta_e = u/c$ et γ_e le facteur relativiste correspondant.

3. Tracer, avec soin, le graphe $f(\theta) = (4\pi/N)\,\mathrm{d}N/\mathrm{d}\Omega$. Comparer au graphe correspondant $f'(\theta')$ dans R'. Que perçoit l'observateur quand la source s'approche de lui ? Quand la source s'éloigne de lui ?

Exercice 5 : vitesse de la lumière dans un milieu matériel en mouvement
Une lame de verre à faces parallèles, d'indice $n = 1{,}5$ et d'épaisseur $e = 1$ cm, se déplace dans le référentiel du laboratoire $R = Oxyz$, dans la direction Ox perpendiculaire aux faces, à la vitesse $\boldsymbol{u} = u\,\boldsymbol{e}_x$ avec $u = c/2$, c étant la célérité de la lumière dans le vide. On assimile l'air au vide et on rappelle que l'indice n d'un milieu est le rapport de c sur la célérité de la lumière dans le milieu considéré. Un éclair lumineux traverse la lame dans la direction ex. On désigne par E_1 l'évènement 'entrée de l'éclair dans la lame' en O et à l'instant pris comme origine, et E_2 l'évènement 'sortie de l'éclair de la lame'. On associe à la lame le référentiel R' en translation, rectiligne, uniforme par rapport à R.

1. Calculer le facteur relativiste γ_e associé au mouvement de R' par rapport à R.
2. Trouver, en fonction de e, n, $\beta_e = u/c$ et γ_e, les coordonnées spatio-temporelles de E_2 dans R' et dans R.
3. En déduire, en picoseconde, les durées de traversée de la lame dans R' et dans R. Quelle est -en cm- la distance qui sépare, dans R, les évènements E_1 et E_2.
4. Trouver, en fonction de e et n, l'expression du carré de l'intervalle entre E_1 et E_2. Calculer la valeur de cet intervalle en cm^2.
5. Etablir, en fonction de n et β_e, la relation entre la vitesse v de l'éclair dans R et celle v' dans R' à l'aide des questions précédentes. Retrouver ce résultat à partir des formules de transformation des vitesses. En déduire la valeur numérique de v/c ; la comparer à v'/c.
6. Quelle est l'expression de v dans l'approximation newtonienne ?
7. Réécrire la vitesse v de l'éclair, par rapport au laboratoire, sous la forme :

$$v = u + \frac{c}{n(u)},$$

où $n(u)$ est une fonction de u que l'on déterminera. Tracer v en fonction de u. Commenter. Justifier l'interprétation de $n(u)$ comme un entrainement partiel de l'éther par un milieu matériel mobile. Cette effet d'entrainement fut mesuré avant que la relativité ne soit connue. On l'appela loi d'entrainement de Fresnel.

8. Application à l'expérience de Fizeau. Cette expérience réalisée par H. Fizeau en 1851 consiste à étudier à l'aide d'un système optique interférentiel, de type bi-fentes d'Young, la vitesse dans un courant d'eau. La répartition de l'intensité sur l'écran d'observation est donnée par $I(x) = 2I_0[1 + cos(2\pi\Delta L \,/\, \lambda 0)]$, où λ_0 est la longueur d'onde du rayonnement monochromatique (dans le vide) et ΔL la différence de chemin optique. En l'absence de courant d'eau, ΔL s'identifie à ax/f, où a est la distance entre les deux fentes, x la coordonnée du point d'observation sur l'écran et f la focale de la lentille ramenant la figure d'interférences sur l'écran. On établit un courant d'eau dans le tube, de vitesse constante u. La forme du tube est telle que devant l'une des fentes, l'eau circule sur une distance l dans la direction du faisceau incident de lumière et que devant l'autre fente l'eau circule dans la direction opposée sur la même distance. On observe alors un décalage des franges d'interférence.

   Montrer qu'en cinématique galiléenne la différence de chemin optique supplémentaire ΔL_{eau} induite par la circulation de l'eau vaut :

$$\Delta L_{eau} = \frac{2luc}{c^2/_{n^2} - u^2} \approx \frac{2ln^2u}{c}.$$

   Dans le cas où $u = 7$ m s^{-1}, $n = 1{,}33$, $\lambda_0 = 530$ nm et $l = 1{,}5$ m, on trouve expérimentalement un décalage des franges d'interférence, exprimé en $\Delta L_{eau} \,/\, \lambda_0$, qui est proche de 0,1. Ce décalage diffère de celui prévu en cinématique galiléenne. Calculer la valeur de ce dernier. Fizeau fit remarquer que le résultat expérimental pouvait être retrouvé en multipliant la vitesse du courant d'eau u par le facteur $F = 1 - 1 / n^2$ (appelé facteur d'entrainement de Fresnel). Vérifier qu'il en est bien ainsi. Montrer que l'on peut réécrire l'expression einsteinienne de v (établie à la question 5) sous la forme $v = \frac{c}{n} + uf$, f étant un facteur que l'on exprimera en fonction de u et n. Comparer f au facteur d'entrainement de Fresnel F. Conclure.

Exercice 6 : mouvement général d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et indépendant du temps

On considère une particule chargée, de charge q, en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R) où existe un champs électrique uniforme et indépendant du temps, $\boldsymbol{E}_s$ dirigé suivant l'axe Ox. A l'instant initial, $t = 0$, la particule est à l'origine du repère R et est animée d'une vitesse initiale $\boldsymbol{v}_0$ parallèle à l'axe Oy et donc perpendiculaire au champ électrique.

1. Etudier le mouvement de cette particule par rapport au référentiel R et donner l'équation cartésienne de sa trajectoire dans le cadre de la mécanique relativiste. Au cours de ce calcul, on exprimera la vitesse de la particule en fonction de l'impulsion et de l'´énergie, ainsi que l'´énergie en fonction du temps.

2. Retrouver l'expression de la trajectoire classique dans l'approximation non relativiste.

On donne :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = argsh(u)$$

$$ch^2(u) - sh^2(u) = 1$$

$$\text{si } |u| << 1 \text{ alors } ch(u) \sim 1 + u^2/2.$$